Tze Leung Lai, Haipeng Xing *Statistical Models and Methods for Financial Markets*, Springer

松原・山村（訳）『ファイナンスのための統計学—統計的アプローチによる評価と意思決定』東京図書
（Stanford 大学大学院 統計学研究科修士課程テキスト）

§10.4 確率的金利と短期金利モデル

ここでは将来の金利を条件とする金利デリバティブの価格付けを考慮しよう。そこで、金利のダイナミクスをまず決め、さらに Black-Scholes 理論におけると似た無裁定の過程に基づいた価格付けを行う。文献にみる確率モデルの大部分は 10.1.1 項で定義した短期金利の拡散過程

$$dr_t = m(t, r_t)dt + s(t, r_t)dw_t \quad (10.21)$$

によっている。ここで $\mu(t, r) = m(t, r)/r$, $\sigma(t, r) = s(t, r)/r$ とすると $dr_t/r_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dw$ となり、ここで伊藤の公式が使える。ただし 8.1.2 項のヘッジ理論を、今回は満期の異なる 2 つの債権のポートフォリオに用いることで、次のことが示される。裁定が存在しない条件のものとは、

$$\lambda(t, r) = \frac{\mu(t, r) - r}{\sigma(t, r)} \quad (10.22)$$

は r_t に基づくすべてのデリバティブにわたって同一である（なお、この λ は 3.3.2 項のシャープ比と似ている）。これを「リスクの市場価格」（market price of risk）という。

さらに、金利デリバティブの価格を $g(t, r)$ は Black-Scholes 型の PDE（偏微分方程式）

$$\frac{\partial g}{\partial t} + (m - \lambda_s) \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{s^2}{s} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = rg, \quad 0 \leq t < T \quad (10.23)$$

を満足する。バー値が 1 の債権の場合は、終期条件は $g(T, r) = 1$ である。この (10.23) およびこの終期条件の解は、期待値

$$\hat{E} \left\{ \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| r_t = r \right\}; \quad (10.24)$$

で表現できる。付録 A 参照。ここで $\hat{E}$ は r_t が拡散過程

$$dr_t = (m - \lambda_s)ds + sdw_t$$

の解であるものの期待値である（「リスク中立」測度、あるいはより正確には「同値マルチンゲール測度」に対応する）。

多変量ブラウン運動、伊藤の定理、ファインマン・カツツの公式

尤度理論と確率的回帰変数の回帰モデルへの応用では、マルチンゲール中心極限定理の多変量版を使った。ここでは条件付き分散は条件付き共分散行列で置き換えられ、ブラウン運動は多変量ブラウン運動で置き換えられる。‘ p -次元ブラウン運動’ $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), \dots, w_p(t))^T$ は p 個の独立なブラウン運動 $w_i(t), 1 \leq i \leq p$ を p -次元ベクトルに置いたものである。それゆえ、それは $\mathbf{w}_t \sim N(\mathbf{0}, t\mathbf{I})$ であるような、独立増分と連続サンプル経路を持つ。 p -次元ブラウン運動は多変量中心極限定理だけではなく確率解析においても基本的な役割を担う。それは通常解析学（微分、積分、連鎖律）を p -次元ブラウン運動の増分で生成される確率成分を持つ軌跡に拡張される。これらの軌跡を支配する運動法則は‘確率微分方程式（SDE）’で

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{b}(t, \mathbf{x}_t)dt + \sigma(t, \mathbf{x}_t)d\mathbf{w}_t \quad (\text{A.12})$$

の形で記述することができる。 $\sigma = \mathbf{0}$ の場合、SDE は通常微分方程式になり、微分の連鎖律は滑らかな実数値関数 $f = f(t, \mathbf{x}_t)$ に適用出来て、 $df(t, \mathbf{x}_t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^p b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f(t, \mathbf{x}_t)$ を得る。これは f の第一近似に対応する。確率解析学の本質的違いは $d\mathbf{w}_t(d\mathbf{w}_t)^T = \mathbf{I}dt$ によっており、 σ がゼロ行列に恒等でない時、 $d\mathbf{w}_t$ 項の f の二次導関数を無視することができないことを示唆している。 $\sigma\sigma^T = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ とし、

$$\mathcal{A}_t u = \sum_{i=1}^p b_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (\text{A.13})$$

で実数値関数 u の 2 回連続微分可能な作用素 $\mathcal{A}_t$ を導入すれば伊藤の定理 SDE (A.12) の滑らかな実数値関数に対する連鎖律を与える。

$$df(t, \mathbf{x}_t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}_t \right) f(t, \mathbf{x}_t)dt + (\nabla f(t, \mathbf{x}_t))^T \sigma(t, \mathbf{x}_t)d\mathbf{w}_t, \quad (\text{A.14})$$

ここで、 ∇ は勾配ベクトル $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_p)^T$ を表す。

(A.13) で定義される作用素 $\mathcal{A}_t$ は SDE (A.12) の‘無限小生成作用素’と呼ばれ、SDE を完全に決定する‘ファインマン・カツツ’の公式は PDE

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{A}_t f = hf & \text{for } (t, \mathbf{x}) \in [0, T) \times R^q \\ f(T, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \text{for } \mathbf{x} \in R^q \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

の解を、無限小生成作用素が $\mathcal{A}_t$ である SDE $\mathbf{x}_t$ の期待値

$$f(t, \mathbf{x}) = E \left[g(X_T) e^{-\int_t^T h(u, X_u) du} \mid \mathbf{x}_t = \mathbf{x} \right]$$

によって表すというものである。ファインマン・カツツの公式の特別な場合は (10.24) であり、期待値に関しての PDE (10.23) に与えられる金利デリバティブの価格を表す。